www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

OPTION GÉNÉRALE

Concours National d'admission 1990

MATHÉMATIQUES I
1re épreuve

DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

De nombreuses questions sont indépendantes des précédentes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé.

Avec ce sujet est distribuée une feuille de papier millimétré.

Attention : il n'en sera pas délivré d'autre.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

1° Pour x réel on considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

Déterminer l'intervalle I de $\mathbb{R}$, ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'intégrale est convergente.

2° Soit :

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

a) Montrer que : $\forall x \in I, \quad \varphi(x) \geqslant 0$

b) Établir que φ est décroissante sur I (sans chercher à calculer φ').

3° *a*) Prouver que :

α) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (x-u)\,e^{-u}\,du \leqslant \frac{x^2}{2}$

β) $\forall x \in \mathbb{R}^-, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x (x-u)\,e^{-u}\,du \leqslant \frac{x^2}{2}\,e^{-x}$

b)

α) Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer $\displaystyle\int_0^x (x-u)e^{-u}\,du$

β) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad e^{-th} - 1 = -th + J(th)$$

où $J(th)$ est une intégrale que l'on explicitera.

γ) Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}^+$:

$$\forall h \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant J(th) \leqslant \frac{(th)^2}{2}$$
$$\forall h \in \mathbb{R}^-, \quad 0 \leqslant J(th) \leqslant \frac{(th)^2}{2}\,e^{-th}$$

e^{-tx} ...

4° *a*) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \forall h \in]-x; +\infty[, \quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}(-th + J(th))}{1+t}\,dt$$

b) Pour $x \in I$ et $h \in]-x, 0[\cup]0, +\infty[$ donner une expression sous forme d'intégrale de :

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t}\,dt$$

c) En déduire qu'en tout point x de I φ est dérivable à droite.

d) Démontrer que :

$$\forall x \in I, \quad \forall h \in \left]-\frac{x}{2}, 0\right[, \quad \left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2}|h| \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-\frac{x}{2}t}\,dt$$

Tournez la page S.V.P.

e) En déduire que φ est dérivable en tout point x de I et que sa dérivée est :

$$\varphi' : I \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t}\,dt$$

f) Étudier le sens de variation de φ'. En déduire que φ est convexe.

5° *a*) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) - \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$$

b) En déduire que φ est de classe C^∞ sur I.
(On pourra, par exemple, utiliser une récurrence.)

6° *a*) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

b) En déduire la limite de φ' en $+\infty$.

7° *a*) Pour $x \in I$ et $k \in \mathbf{N}^*$ exprimer $\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)$ sous forme d'une somme ($\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de φ).

b) En déduire la limite de $\varphi^{(k)}$ en $+\infty$.

8° Pour $A \in \mathbf{R}^+$ on considère :

$$R_A(x) = \int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1-t}\,dt \quad \text{(avec } x \in I\text{)}$$

a) Montrer que :

$$0 \leqslant R_A(x) \leqslant \frac{1}{(1+A)x}$$

b) En déduire en fonction de x ($x \in I$) une valeur de A telle que $\int_0^A \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$ soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\varphi(x)$.

c) A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$. (On prendra, si le programme de la calculatrice le demande, une subdivision en 200 intervalles et on supposera que l'erreur de calcul due à la machine est nulle.)

d) Tracer la courbe représentative ϕ de φ sur $[1, +\infty[$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 10 cm.) On tracera les tangentes à ϕ aux points $M_1(1; \varphi(1))$ et $M_2(2; \varphi(2))$.

9° *a*) Démontrer que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt$$

b) Prouver que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,dt = 0$$

c) En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

d) Montrer plus généralement que $\varphi\left(\frac{1}{X}\right)$ admet en zéro un développement limité d'ordre 3 que l'on précisera.

10° *a*) Établir que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

b) En déduire que $\varphi(x)$ est équivalent à $-\ln x$ au voisinage de 0.

c) Compléter la représentation graphique de φ sur $]0, 1]$ (dans le même repère qu'au 8° *d*)).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail